Rozwiązywanie układów równań liniowych - rozkład LU

Mamy układ równań w postaci macierzowej:

$$A \times X = B \tag{1}$$

Rozkładamy macierz kwadratową A na iloczyn macierzy trójkątnych, dolnej L o wyrazach przekątnej głównej równych 1 oraz górnej U:

$$A = L \times U \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Podstawiamy równanie (2) do (1):

$$L \times (U \times X) = B \tag{4}$$

Za $U \times X$ wstawiamy Y:

$$L \times Y = B \tag{5}$$

Obliczamy wektor Y podstawiając w przód:

$$y_1 = b_1 \tag{6}$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} y_j \tag{7}$$

Znając wektor Y i pamiętając, że $U \times X = Y$ obliczamy wektor X podstawiając wstecz, który jest rozwiązaniem układu równań:

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \tag{8}$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} x_j \quad dla\ i = n-1, \dots 1 \tag{9}$$

Rozkład LU - algorytm Doolittle'a

1) Utwórz dwie macierze L i U o stopniu macierzy A
2) Wyzeruj macierze L i U
3) W macierzy L elementom na głównej przekątnej przypisz wartości 1
4) Oblicz:
   - Macierz U gdy $i \leq j$

$$u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j} \tag{10}$$

   - Macierz L (gdy $i > j$):

$$l_{i,j} = \frac{1}{u_{j,j}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j} \right) \tag{11}$$

Przykład

$$\begin{cases} 2x_0 + 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 10 \\ 2x_0 + 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_0 + 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6 \\ 0x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 4 \end{cases}$$

Macierz A:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$u_{1,1} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j} = a_{1,1} - \sum_{k=1}^{0} l_{i,k} \times u_{k,j} = 2$$

$$u_{1,2} = 4$$

$$u_{1,3} = 2$$

$$u_{1,4} = 1$$

$$l_{2,1} = \frac{1}{u_{j,j}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j} \right) = \frac{1}{u_{1,1}} \left(a_{2,1} - \sum_{k=1}^{1} l_{2,1} \times u_{1,1} \right) = \frac{1}{2}(2 - 0 \times 2) = 1$$

$$l_{3,1} = \frac{1}{u_{1,1}} \left(a_{3,1} - \sum_{k=1}^{2} l_{3,k} \times u_{k,1} \right) = \frac{1}{2}(4 - 0 \times 2 + 0 \times 1) = 2$$

$$l_{4,1} = \frac{1}{u_{1,1}} \left(a_{4,1} - \sum_{k=1}^{3} l_{4,k} \times u_{k,1} \right) = \frac{1}{2}(0 - 0 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 0) = 0$$

$$u_{2,2} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j} = a_{2,2} - \sum_{k=1}^{1} l_{2,1} \times u_{1,2} = 2 - 1 \times 4 = -2$$

$$u_{2,3} = a_{2,3} - \sum_{k=1}^{1} l_{2,1} \times u_{1,3} = 3 - 1 \times 2 = 1$$

$$u_{2,4} = a_{2,4} - \sum_{k=1}^{1} l_{2,1} \times u_{1,4} = 3 - 1 \times 1 = 2$$

$$l_{3,2} = \frac{1}{u_{2,2}}\left(a_{3,2} - \sum_{k=1}^{2} l_{3,k} \times u_{k,2}\right) = \frac{1}{-2} \times \Big(2 - \big(2 \times 4 + 0 \times (-2)\big)\Big) = 3$$

itd…

```
Macierz U:
2       4       2       1
0       -2      1       2
0       0       -5      -7
0       0       0       0.2

Macierz L:
1       0       0       0
1       1       0       0
2       3       1       0
0       -1      -0.4    1
```

Zadanie:
Napisz program, który będzie rozwiązywał układ n równań liniowych o n niewiadomych z zastosowaniem rozkładu LU (algorytm Doolittle'a).

Wymagania:

a) Dane pobierane są z pliku.
b) W przypadku wystąpienia 0 na przekątnej macierzy, program wypisze stosowny komunikat.
c) W wyniku działania program wypisuje:
   - Macierz rozszerzoną (przed obliczeniami)
   - Macierze L i U
   - Wektor Y
   - Rozwiązanie układu równań $(x_0 - x_n)$

Poprawność działania programu zweryfikować danymi, które podano w przykładzie wyżej.

W sprawozdaniu zamieścić wyniki rozwiązania układu równań podanego w plikach tekstowych: RURL_dane1.txt, RURL_dane2.txt

Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-7 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-7).